



עיבוד תמונה מודרני:  
תהליך בלטרמי, נחשים.

## עבודה בצבע באמצעות תהליך בלטרמי

### מטרת הניסוי

הפעלת תהליך דיפוזיה על אות מרובה ערוצים , כדוגמת תמונת צבע . הכרה בסיסית של תהליך בלטרמי (Beltrami) - דיפוזיה מוכללת על יריעה רימאנית (Riemannian manifold) עם מטריקה משתנה במקום . נבצע סינון רעש על כל הערוצים במקביל ונשווה לסינון כל ערוץ בנפרד.

### רקע תאורטי

הדרך להכללת תהליכי הדיפוזיה הלא לינארית לצבע אינה טריביאלית ויכולה להתבצע במספר שיטות . אנו נציג כאן שיטה כללית היכולה לבטא תהליכים הפועלים על אותות מכל מימד שהוא ובמספר ערוצים כלשהו (יכול להתאים לפיכך גם לסרטי וידאו צבעוניים – אות תלת מימדי ותלת ערוצי , צילומי לוויין עם מספר רב של פרוסות ספקטרום וכו'). הכללה זו נשענת על בסיס מתמטי מוצק ונותנת תוצאות משביעות רצון.

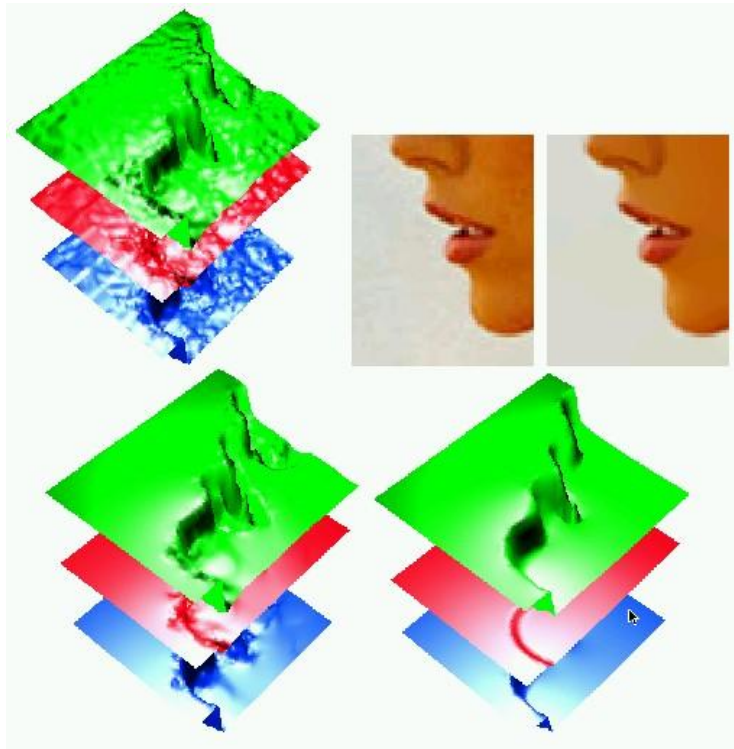
נציג כאן את ההסברים לגבי תמונת צבע בלבד (אות דו-מימדי תלת ערוצי). הכללות נוספות לתמונות MRI תלת מימדיות, סרטים, ניתוח טקסטורות ושימושים נוספים ניתן לקרוא ב- [SKM98], [KMS00] .



תרשים מס' 3.1: תהליך בלטרמי על תמונת צבע בשלבים שונים.

משמאל לימין: תמונה מקורית, שלב ביניים בתהליך (בו מסונן רב הרעש אך עיקר התמונה נשאר), שלב מתקדם (בו מרבית הפרטים והטקסטורות מסוננים אף הם). נלקח מ- [KMS00].

בניסוי תוכלו לראות שההכללה הטריביאלית לצבע – הפעלת דיפוזיה לא לינארית בנפרד על כל ערוץ צבע – אינה פועלת היטב. מספר מחקרים הראו שהדרך לקביעת מקדם הדיפוזיה צריכה להיות כוללת, תוך הסתמכות על כל הערוצים. על מקדם הדיפוזיה להיות זהה בכל הערוצים על מנת שלא לבצע באותו מקום דיפוזיה איטית בצבע אחד ומהירה באחר – דבר הגורם לעיוותי צבע וצורה בתוצאה המתקבלת.



תרשים מס' 3.2: תהליך בלטרמי – תאור תלת מימדי של העוצמה

בערוצי הצבע השונים לאורך שלבי התהליך.

המאפיינים העיקריים של תהליך סינון זה: הקצוות נשמרים,

הצבעוניות המקורית נשמרת, מיקום הקצה בערוצי הצבע השונים מתאחד. נלקח מ-[KMS00].

מקדם דיפוזיה אחיד המסתמך על כלל הערוצים מתקבל באופן טבעי אם מגדירים את תמונת הצבע כיריעה דו מימדית (משטח) המשוכנת במרחב 5-מימדי  $(x,y,R,G,B)$ . לצורך שיכון כזה יש לקבוע יחס בין יחידות הצבע ליחידות המקום, המסומן ב- $\beta$ . התהליך מתקבל באופן דומה לפיתוח שנעשה עבור תהליך פרונה- מליק. מתקבל תהליך דיפוזיה המתבצע על גבי יריעה שניתן להגדרה בצורה תמציתית תוך שימוש בלפלאסיאן של בלטרמי:

$$(3.1) \quad \mathbf{I}_t = \Delta_g \mathbf{I}$$



כאשר  $I$  הינו אות רב ערוצי,  $g$  היא המטריקה הנתונה על המשטח דהיינו, אלמנט האורך המשמש לחישוב מרחק בין נקודות על המשטח,  $\Delta_g$  הינו הלפלאסיאן של בלטרמי. נקודת המבט בתהליך זה היא גיאומטרית כאשר פונקציית האנרגיה המוגדרת על המשטח (התמונה) היא השטח.

בהנתן שתי נקודות על משטח המרחק ביניהן הוא אורך המסילה הקצרה ביותר בין הנקודות שעוברת על גבי המשטח. אורך מסילה כזו ניתן ע"י

$$\int_1 |c'(s)| ds$$

כאשר  $s$  הוא הפרמטר של המסילה  $c$ , ואלמנט האורך  $ds$  מוגדר על-פי המטריקה  $g$ . המסילה בעלת האורך המינימלי בין שתי נקודות על משטח נקראת "הקו הישר" בין הנקודות. הערה: כל האמור לעיל נתן להכללה טבעית ליריעות מכל מימד.

עבור תמונת צבע מתקבל הביטוי הבא לתהליך בלטרמי:

$$\begin{aligned} \Delta_g I^k &= \frac{1}{\sqrt{G}} \operatorname{div}(\sqrt{G} g^{-1} \nabla I^k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{G}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\sqrt{G}} (g_{22} I_x^k - g_{12} I_y^k) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\sqrt{G}} (-g_{12} I_x^k + g_{11} I_y^k) \right) \right] \end{aligned}$$

כאשר

$$g \equiv \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \beta + (I_x^R)^2 + (I_x^G)^2 + (I_x^B)^2 & I_x^R I_y^R + I_x^G I_y^G + I_x^B I_y^B \\ I_x^R I_y^R + I_x^G I_y^G + I_x^B I_y^B & \beta + (I_y^R)^2 + (I_y^G)^2 + (I_y^B)^2 \end{pmatrix}$$

$$G \equiv \det(g) = g_{11} g_{22} - (g_{12})^2$$

$$g^{-1} = \frac{1}{G} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}$$

$I^k$  הינו אחד מערוצי הצבע:  $k = \{R, G, B\}$ . תהליך האבולוציה (דיפוזיה) מתבצע על כל ערוץ בנפרד כאשר  $g$  מקשרת בין המשוואות (גורמת להן להיות מצומדות):

$$(3.3) \quad I_t^k = \Delta_g I^k, \quad k = \{R, G, B\}$$

ניתן לראות את  $g$  כמטריקה המשתנה במקום. ההופכי של  $g$  דומה למקדם הדיפוזיה הלא לינארית  $c$  אך חישובו נעשה לפי כל הערוצים.

נתן לשים לב לדמיון בין המטריקה  $g$  לבין טנזור המבנה שהוצג החלק הקודם.



**שאלות דר"ח מכין**

\*1. תהיה נתונה הקבוצה

$$A = \{z = x + iy ; y > 0\}$$

נגדיר מטריקה על S על ידי

$$ds = \frac{|dz|}{y} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

א. מה המרחק בין שתי נקודות בקבוצה ?

רמז: נתן להניח ראשית שהנקודות נמצאות לאורך אותו קו אנכי

ב. כיצד נראים "הקווים הישרים" בקבוצה זו ?

נבחן את משמעות הפרמטר  $\beta$  (ביתא). נבחן זאת עבור תהליך הבלטרמי הפשוט ביותר – חד ערוצי, חד מימדי. כתוב את המשוואה של תהליך זה. השאף את  $\beta$  לאפס. איזה תהליך נקבל במקרה זה ? (האם דומה לאחד התהליכים שהוזכרו קודם). חזור על השאלה כאשר  $\beta \rightarrow \infty$ . סכם את ההשפעה הצפויה של הפרמטר  $\beta$  על התהליך (הגדלתו תגרום ל... הקטנתו תגרום ל...).

**תאור הניסוי**

(יש לענות על כל השאלות בד"ח המסכם)

העזר בקבצי הדוגמא `demo_color{1,2}.m`.

1.ד.2 בחר תמונת צבע. הוסף רעש. סנן כל ערוץ צבע (R,G,B) באופן נפרד ע"י תהליך TV ( $\epsilon=1$ ). הרכב הערוצים המסוננים שוב והצג התוצאה.

2.ד.2 סנן אותה תמונת באופן מאוחד ע"י תהליך בלטרמי ( $\beta=1$ ).

3.ד.0 חזור על התהליך עם מספר תמונות. השווה את תוצאות שני התהליכים. עמוד על הדמיון והשוני. איזו דרך עדיפה?



1.ה.2 בחר תמונת צבע. הוסף רעש. סנן ע"י תהליך בלטרמי עם ערכי  $\beta$  שונים.

הערה: לצורך יציבות נומרית דאג כי עבור  $\beta < 1$  צעד הזמן  $dt$  קטן פי  $\beta$ , מספר האיטרציות  $iter$  גדל פי  $\beta$ .

2.ה.0 השווה התוצאות. נסח כללים) עבור אופי הסינון המשתנה כתלות בביתא. השווה לצפוי מהפיתוח התאורטי שחישבת בד"ח המכין.



## ניסוי 4 – סגמנטציה

### (Geodesic Snakes)

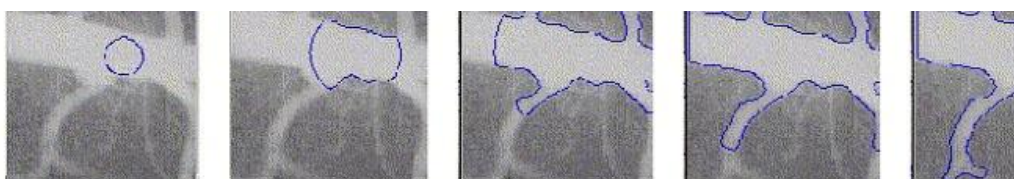
#### מטרת הניסוי

הפרדה למקטעים (סגמנטציה) של אובייקטים ורקע. הפעלת נחשים גיאודטים (geodesic snakes) למציאת קו ההפרדה האופטימלי (חלק, קצר, סמוך לקצוות) בין רקע לאובייקט.

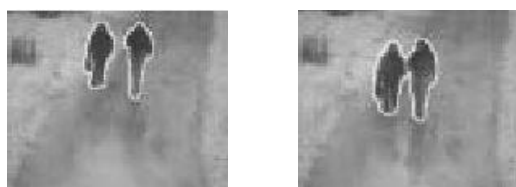
#### 4.1 הקדמה

בחלק זה של הניסוי נעסוק בבעיה של מציאת אובייקטים שונים בתמונה תוך שימת דגש מיוחד על תהליך מציאת קווי השפות המפרידים בין אובייקטים, בין אובייקטים לרקע ועוד. נתאר את התהליך של מציאת שפה בתמונה ע"י הפעלת כלי הנקרא **נחשים גיאודטים** (Geodesic Snakes / Geodesic Active Contours).

את הבעיה ניתן לתאר באופן הבא. בתמונה הנתונה משמאל נראה כלי דם בהיר על רקע כהה. העיגול הכחול הוכנס לתמונה באופן מלאכותי ואנחנו רוצים לגרום לקו הכחול לנוע עד ש"יתלבש" על שפת כלי הדם.



לשיטה זו שימושים רבים החל מזהווי תאים סרטניים בתמונות רפואיות וכלה בכלי CAD לפיתוח רכיבים אלקטרוניים ועקיבה אחרי מספר אובייקטים נעים בסדרת תמונות וידאו תוך התייחסות להסתרות חלקיות דוגמת צמד התמונות הבאות.



בשיטת הנחשים הגיאודטים נעשה שימוש נרחב ברעיונות וכלים גיאומטריים בעיקר מתחום הגיאומטריה הדיפרנציאלית ומשם כך חלק זה יכלול פרק קצר אך הכרחי על גיאומטריה דיפרנציאלית.



## 4.2 רקע תיאורטי

הרעיון הבסיסי שעומד מאחורי פתרון הבעיה הוא הגדרת פונקציונאל אנרגיה על התמונה באופן שבו מציאת עקום שלאורכו מתקבל מינימום עבור האנרגיה שהגדרנו, יתאים להיותו של עקום זה קו-שפה.

ובכן, בהינתן תמונה,  $I$ , ועקום,  $C$ , בתמונה נגדיר את האנרגיה של  $C$  להיות

$$(4.2.1) \quad E(C) = \alpha \int_0^1 |C'(q)|^2 dq + \int_0^1 p(|\nabla I(C(q))|^2) dq$$

כאשר  $g$  היא פונקציה חלקה ומונוטונית יורדת למשל

$$p(x, y) = \frac{1}{1 + |\nabla I(x, y)|^2}$$

מטרתנו היא למצוא עקום שלאורכו האנרגיה מינימלית.

**הערה:** מינימיזציה של המחובר הראשון תורמת לחלקות של העקום, ואילו מינימיזציה של המחובר השני ניתנת לפירוש כקו-שפה.

לפני שנמשיך בתיאור הפתרון, קצת גיאומטריה.

מבוא גיאומטרי

בפרק זה נציג מספר מצומצם של נושאים בגיאומטריה דיפרנציאלית אשר יהיו הכרחיים להבנת המשך הניסוי.

**הגדרות:**

עקום  $c: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$  גזיר פעמיים ברציפות יקרא **רגולרי** אם לכל  $0 \leq t \leq T$ ,  $c'(t) \neq 0$ , דיוננו יצטמצם

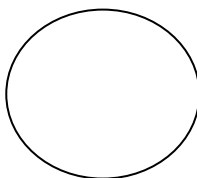
לעקומים רגולריים בלבד. בד"כ נרשום את  $c$  ע"י הצגה מפורשת  $c = (x(t), y(t))$

או הצגה סתומה ע"י  $u(x, y) = 0$  כאשר  $u$  היא פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות מסדר שני.

למשל מעגל ברדיוס 1 נוכל להציג בשני האופנים הבאים

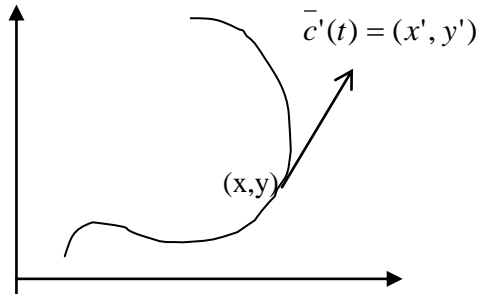
$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{או} \quad \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$(-1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1)$$





לעקום  $c = (x(t), y(t))$ , הוקטור  $\bar{c}'(t) = (x'(t), y'(t))$  הוא הוקטור המשיק לעקום בנקודה  $c(t)$ .



הגדרה: יהיה  $c(s)$  עקום. נגדיר את העקמומיות של  $c$  בנקודה  $c(s)$ . כל שלש נקודות  $\{c(s_0); c(s), c(s_1)\}$  שנמצאות על העקום קובעות מעגל יחיד במישור. אם ניתן לשלש הנקודות לשאוף זו לזו אז בגבול נקבל מעגל משיק בנקודה  $c(s)$ . מעגל זה נקרא מעגל הנישוק. העקמומיות בנקודת ההשקה ניתנת ע"י

$$k(s) = \frac{1}{r(s)}$$

כאשר  $r$  הוא רדיוס מעגל הנישוק.

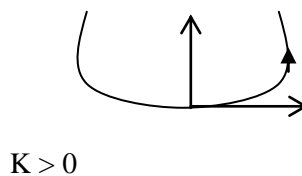
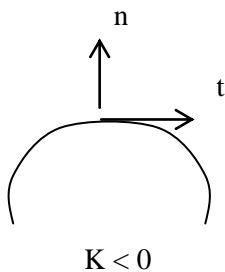
**הערות:**

(1) אם  $c(s)$  עקומה כך ש-  $|c'|=1$  לכל  $s$ , אז וקטור הנגזרת השנייה ניתן ע"י

$$\bar{c}''(s) = k(s)\bar{n}(s)$$

כאשר  $\bar{n}(s)$  הוא וקטור יחידה ניצב לוקטור המשיק בנקודה.

(2) הסימן של העקמומיות  $k$ , נקבע באופן הבא. יהיה  $\{e_1, e_2\}$  הבסיס הסטנדרטי של  $R^2$ , וקטור הנורמל  $n(s)$  נבחר כך שמטריצת מעבר הבסיסים מהבסיס הסטנדרטי לבסיס  $\{t(s), n(s)\}$  היא בעלת דטרמיננטה חיובית (שני הבסיסים מגדירים את אותה אוריינטציה על המישור).







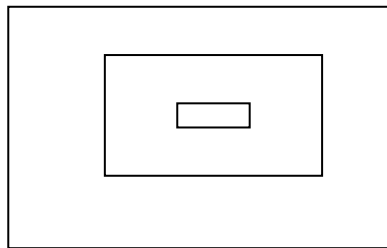
הנעת עקומים במישור

תהיה  $c_0(s)$  עקומה במישור. יהיה  $n$  וקטור יחידה ניצב ל  $c'$  בכל נקודה לאורך העקום ותהיה  $p(t, s)$  פונקציה חלקה. נאמר ש-  $c(s)$  היא הזזה נורמלית של  $c_0$  אם לכל  $s$  ולכל זמן  $t$  מתקיים

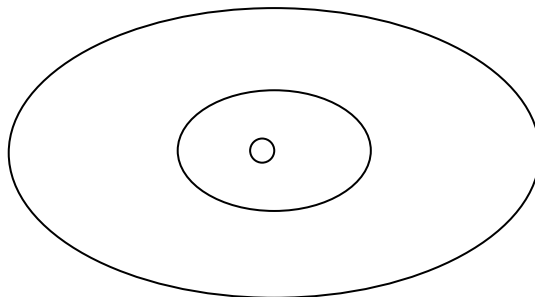
$$(4.2.1.2) \quad \frac{\partial c(t,s)}{\partial t} = p(t,s) \cdot n(t,s)$$

כל נקודה לאורך העקום נעה במהירות  $p$  בכיוון הנורמל  $n$ .  
 דוגמאות:

$$(1) \quad \frac{\partial c(t,s)}{\partial t} = v_0 n(t,s) \text{ - (constant flow)}$$



$$(2) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = k(t,s)n(t,s) \text{ - (curvature flow)}$$



**משפט (Grayson):** עקומה סגורה  $c$  שנעה לפי עקמומיות מתכווצת ונעלמת בנקודה.

ובחזרה לפתרון הבעיה שהצגנו בתחילת חלק זה של הניסוי.



המשך הפתרון

לאחר אנליזה מתאימה (ראה [CKS97]) מתברר שניתן להציג את פונקציונאל האנרגיה שהגדרנו במשוואה (4.2.1) באופן שקול וקומפקטי יותר ע"י הפונקציונאל הבא. לכל עקומה  $C$  במישור התמונה  $I$  תהיה האנרגיה שלה נתונה ע"י

$$(4.2.2) \quad E(C) = \int_0^{L(C)} p(|\nabla I(C(s))|) ds$$

כאשר  $g$  פונקציה מונוטונית יורדת ו-  $\lim_{r \rightarrow \infty} p(r) = 0$ .

פתרון משוואת אוילר – לגרנז' ( $E - L$ ) עבור  $E$  לעיל למציאת עקום עם אנרגיה מינימלית נותן את תהליך הדיפוזיה המוגדר ע"י

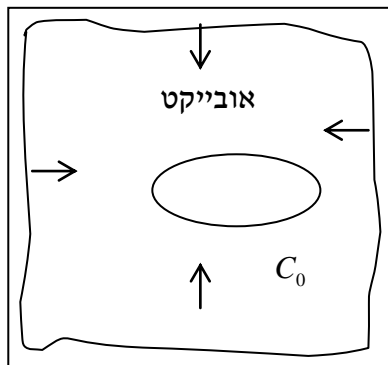
$$(4.2.3) \quad \frac{\partial C(t,s)}{\partial t} = p(C)k(t,s) \cdot \overline{n(t,s)} - \langle \overline{\nabla p}, \overline{n(t,s)} \rangle \cdot \overline{n(t,s)}$$

כאשר  $k(t, s)$  היא העקמומיות בכל נקודה לאורך  $C(t, s)$  בכל רגע  $t$ , ו-  $n(t, s)$  הוא וקטור נורמל יחידה לעקומה  $C$  בכל נקודה ובכל זמן.

משוואה (4.2.3) היא המשוואה הבסיסית המגדירה את תהליך הנחשים הגיאודטים. לא נעמוד כאן על מקור השם נחשים גיאודטים אלא נאמר רק ששיטה זו היא גרסה של שיטת הנחשים שמקורה פיזיקלי במהותו בתוספת שיקולים גיאומטריים עליהם נעמוד בקצרה מייד ומהם נגזר מושג הגיאודטיות.

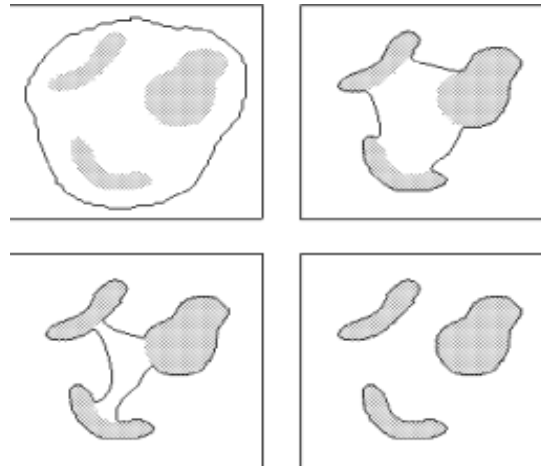
כפי שניראה במשוואה לעיל תהליך הדיפוזיה המתבצע הוא הכלאה של שני תהליכים. האחד ניתן על-ידי המחובר הראשון והוא התהליך הגיאומטרי שלוקח בחשבון את העקמומיות של העקום  $C$ , ואילו השני שניתן על-ידי המחוסר לוקח בחשבון את הגראדיאנטים של התמונה והוא יתאים להמצאות שפה.

התהליך בכללותו מתבצע באופן הבא. בהינתן תמונה נגדיר באופן מלאכותי עקום  $C_0$  שיקיף את רוב שטח התמונה. נבצע את תהליך הדיפוזיה (4.2.3). התהליך הגיאומטרי יגרום לעקום להתכווץ כלפי פנים התמונה לפי משפט Grayson ואילו התהליך הפיזיקלי שסימנו ולכן גם כיוון התנועה שהוא מגדיר (כלפי חוץ) ימנע מהעקום להעלם בנקודה ובסופו של דבר נקבל מצב של שיווי משקל בדיוק לאורך קווי שפה.



הנעת קוים ומשטחים על-פי קווי- גובה ומשטחי- רמה

המטרה כעת היא לממש את תהליך הדיפוזיה שנתון במשוואה (4.2.3) הלכה למעשה. מתברר שמשימה זו מציבה מספר בעיות שאת חלקן קשה מאוד עד כדי בלתי אפשרי לפתור על- ידי פתרון נומרי נאיבי של (4.2.3). אחת מהן היא המעקב אחר שינויים טופולוגיים.



בסדרת התמונות למעלה העקום ההתחלתי נתון בתמונה השמאלית העליונה והמצב הסופי הוא זה שבימנית התחתונה. בכדי לעבור בהצלחה מההתחלה לסוף הטופולוגיה של העקום חייבת להשתנות מעקום יחיד שמקיף את שלשת האובייקטים שבתמונה לשלשה עקומים נפרדים שכל אחד מהם מקיף אובייקט בודד בתמונה. לו היינו מנסים לבצע זאת על-פי משוואה (4.2.3) כמות שהיא היינו נתקלים במצב בו העקום אינו גזיר ואז התהליך היה נתקע או "מתפוצץ" מחמת חוסר יציבות.

כדי להתגבר על בעיה זו ואחרות נשתמש בגישה של **קבוצות-רמה (Level-Sets)**.

על-פי גישה זו נתייחס לעקום  $C$  אותו רוצים להניע כאל קו- גובה במשטח  $U(x, y)$  שמשוכן ב-  $R^3$ .

דהיינו אנחנו נבנה משטח  $U = U(x, y)$  כך שהעקום  $C$  יתקבל בצורה סתומה על-ידי  $U(x, y) = 0$ . מתברר ([CK97]) שאת תהליך הדיפוזיה (4.2.3) ניתן לקבל על-ידי ביצוע התהליך הבא על המשטח  $U$ .

$$(4.2.4) \quad \frac{\partial U(x,y,t)}{\partial t} = |\nabla U| \operatorname{div} \left( p(\mathbf{I}) \frac{\nabla U}{|\nabla U|} \right)$$

המשוואה לעיל שקולה למשוואה.

$$(4.2.5) \quad \frac{\partial U(x,y,t)}{\partial t} = p(\mathbf{I}) \operatorname{div} \left( \frac{\nabla U}{|\nabla U|} \right) |\nabla U| + \nabla p(\mathbf{I}) \cdot \nabla U$$

עכשיו כל שנותר זה להשתמש בעובדה שלכל קו גובה של משטח שנתון על-ידי  $U(x, y) = \text{const}$  מתקיים



$$(4.2.6) \operatorname{div}\left(\frac{\nabla U(x, y)}{|\nabla U|}\right) = k(x, y)$$

כאשר באגף ימין מתקבלת העקמומיות של  $C$  בנקודה  $C(x, y)$ .

מהצבת (4.2.6) במשוואה (4.2.5) יתקבל התהליך הבא על המשטח  $U(x, y)$ .

$$(4.2.7) \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} = p(I)k \cdot \bar{n} - \langle \bar{\nabla} p, \bar{n} \rangle \cdot \bar{n}$$

את המשטח  $U$  אפשר לבנות באופנים רבים אבל המקובל והנוח ביותר הוא לבנות את  $U$  על-ידי מפת מרחק מסומנת. כלומר לכל נקודה  $(x, y)$  במישור התמונה נגדיר

$$(4.2.8) \quad U(x, y) = \begin{cases} d((x, y), c) & (x, y) \text{ outside } c \\ -d((x, y), c) & (x, y) \text{ inside } c \\ 0 & (x, y) \text{ on } c \end{cases}$$

כאשר  $d(*, c)$  מציין את המרחק האוקלידי בין הנקודה \* והעקומה  $c$ . כל שנותר לעשות הוא להריץ את התהליך (4.2.7) על מפת המרחק  $U$  ולבחור את העקומה  $C$  להיות

$$(4.2.9) \quad C(x, y, t) = \{(x, y) ; U(x, y, t) = 0\}$$

בתור הפונקציה  $g$  אפשר לבחור למשל  $p(x, y) = \frac{1}{\lambda^2 + |\nabla I(x, y)|^2}$  משמש כפרמטר חלקות.



**שאלות דר"ח מכין**

1. השתמש בזהות  $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{u}', \bar{v} \rangle + \langle \bar{u}, \bar{v}' \rangle$  עבור כל שני וקטורים  $\bar{u}, \bar{v}$ , גזירים לפי איזשהו פרמטר  $s$ , בכדי להוכיח שאם  $s$  הוא פרמטר עבור עקום,  $c$ , כך ש-  $|\bar{c}'(s)| = 1$  לכל  $s$ , אז הוקטורים  $\bar{c}'(s)$  ו-  $\bar{c}''(s)$  ניצבים זה לזה כאשר  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  מציין את המכפלה הסקלארית.

2. תהיה  $c(s)$  עקומה כך שמתקיים  $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$ . תהיה  $\theta(s)$  הזווית שיוצר הוקטור המשיק  $t(s)$  עם הכיוון החיובי של ציר  $x$ . הראה ש-  $\theta'(s) = k(s)$ . הדרכה-

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{y'(s)}{x'(s)}$$

$$\theta'(s) = \frac{x' y'' - x'' y'}{(x'^2 + y'^2)} = x' y'' - x'' y'$$

שהוא ביטוי נוסף (אין צורך להראות זאת) לעקמומיות במקרה זה.

3. חזרו לתהליך המתואר בעמ' 15 משוואה (2.10) ותן לו פירוש גיאומטרי העזר לשם כך בשוויון (4.2.6). האם תוכלו לתאר מה יקרה, לו תהליך זה היה מופעל על תמונה דוגמת טביע ות האצבעות שבעמ' 16 אלא שכל קווי טביעות האצבעות שבה היו קווים ישרים?

4. הראו שאם עקום  $c$  נתון בצורה סתומה על - ידי  $U(x, y) = \text{const.}$  כאשר  $U(x, y)$  היא פונקציה דיפרנציאבילית אז  $\nabla U$  ניצב ל-  $\bar{c}'$ .

**תאור הניסוי**

(יש לענות על כל השאלות בדו"ח המסכם)

העזרו בקבצי הדוגמא surface\_generation.m ו- evolution.m

1.7.4 בחרו תמונה מבין "occluded" או- "eight" והריצו את הקובץ surface\_generation.m יש לשים לב לכך שהרזולוציה בה מריצים תהיה 51 x 51.

(1) בנו מפת מרחק לא מסומנת.

(2) יצרו מהמפה בסעיף (1) מפה מסומנת.

האם הכרחי להשתמש במפת מרחק דווקא? מה חשיבות הסימון?

בכדי לסמן מפה חיוני לדעת אילו נקודות נמצאות מחוץ לעקום ואילו נקודות בתוכו.

הציעו אלגוריתם שמאפשר לדעת זאת.

2.7.4 הריצו את evolution.m על התמונות השונות. שימו לב להבדלי מהירות ההתכנסות בתמונות השונות. ממה נובעים לדעתכם הבדלי מהירות אלה?

3.7.4 חזרו על התהליך תוך הוספת שורה/ות קוד המעדכנות את מפת המרחק. בצעו זאת בצעדי זמן שונים ועימדו

על ההבדלים בין תהליך זה לבין התהליך הקודם בו לא עודכנה מפת המרחק.



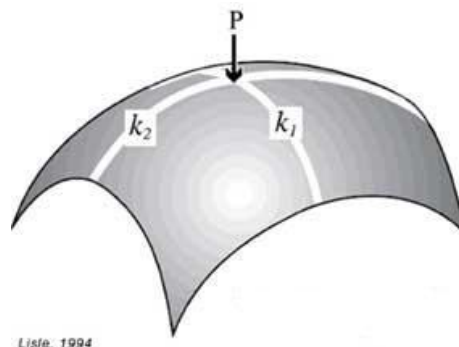
שמרו את קטעי קוד ה-MATLAB שעדכנתם ושיניתם בקובץ בשם evolution\_1.m . 

4.ד.4 כנסו לאתר האינטרנט <http://iacl.ece.jhu.edu/~chenyang/research/levset/movie/index.html> . הריצו את הדוגמאות. תיהנו.

ראינו לכאורה שני סוגים שונים של תהליכי דיפוזיה. תהליך בלטרמי שעל פיו מבוצעת מינימיזציה לפונקצית שטח ומתקבלת משוואה דיפוזיה לפי לפלסיאן בלטרמי ותהליך שני שבו עקום מונע על פי העקמומיות שלו בכל נקודה ובכל זמן.

את מושג העקמומיות ניתן להכליל גם למשטחים (ולמעשה ליריעות מכל ממד סופי). ההכללה הטבעית ביותר למשטחים תהיה לקבוע ערך עקמומיות בכל נקודה המיוחס לכיוון מסוים על פי העקמומיות של מסילה על המשטח העוברת בנקודה וכעשר הוקטור המשיק לה בנקודה, הוא בכיוון שבחרנו, בדומה למושג של נגזרת מכוונת.

מתברר שישנם כיוונים בהם מתקבלים מקסימום ומינימום עבור העקמומיות המכוונת ומערכים אלה ניתן לקבוע מידות עקמומיות התלויות במקום בלבד ולא בכיוון.



ערכים אלה המסומנים לעיל ע"י  $k_1$  ו-  $k_2$  נקראים העקמומיות הראשיות

(principal curvatures) של המשטח בנקודה p. כיווניהם נקראים כיווני העקמומיות והם ניצבים זה לזה.

בעזרת העקמומיות הראשיות ניתן לקבוע מידות עקמומיות התלויות במקום בלבד ולא בכיוון.

אילו הן עקמומיות גאוס והעקמומיות הממוצעת (H, K) בהתאמה והן נתונות על ידי:

$$K = k_1 \cdot k_2$$

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

עבור משטח הנתון כ-  $I = f(x, y)$  מתקבלים הביטויים

$$H = \frac{(1 + f_y^2) f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy}}{2(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}$$



$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}$$

שאלה: נסו לעמוד על הקשר בין האמור כאן לבין תהליך בלטרמי.

#### References:

- Vision, 22(1):61-79, 1997.
- [CV00] Chan T, Vese L.A., Image Segmentation Using Level Sets and the Mumford-Shah Model , CAM 00-14, April 2000
- [KWT87] M. Kass, A. Witkin and D. Terzopoulos, "Snakes: Active contour models," International Journal of Computer Vision, pp. 321-331, 1987.
- [KMS00] R Kimmel, R Malladi and N Sochen, "Images as Embedding Maps and Minimal Surfaces: Movies, Color, Texture, and Volumetric Medical Images", Int. J. of Computer Vision, 39(2):111-129, Sept. 2000.
- [MS89] D. Mumford and J. Shah, Optimal approximations by piece-wise smooth functions and associated variational problems, Comm. Pure and Appl. Math., LII (1989), 577-685.
- [PM90] P. Perona and J. Malik, "Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion", IEEE Trans. PAMI vol. 12,no. 7, pp. 629-639, 1990.
- [ROF92] Rudin L, Osher S and Fatemi C 1992 Nonlinear total variation based noise removal algorithm, Physica D 60, 259-268 (1992).
- [SKM98] N Sochen, R Kimmel and R Malladi , "A general framework for low level vision", IEEE Trans. on Image Processing, 7, (1998) 310-318.
- M P Do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces, 1976.

עבודה נעימה.