



הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

הפקולטה להנדסת חשמל

המעבדה לראייה ומדעי התמונה

מעבדה 1ח', 2, 3

ניסוי בעיבוד תמונות בעזרת wavelets

גרסה חדשה : הלית אונגר 2005

<http://visl.technion.ac.il>

מנהלות

המעבדה כוללת 2 פגישות שמשכן 4 שעות כל אחת (לעתים שתי הפגישות נעשות ברצף).
בכל פגישה יש לבצע ניסויים בהתאם להנחיות המדריך.
מקצוע קדם: מבל"ס (מבוא לעיבוד ספרתי של אותות).
ידע נוסף רצוי: ענ"ת, נסיון בעבודה עם Matlab.
יש להגיע לכל פגישה עם דו"ח מכין כתוב ומוכן להגשה. במהלך הניסוי תישאלו שאלות לגבי הדו"ח המכין ושלבי הניסוי.
לצורך הכנת המעבדה יש לקרוא את פרק 1 בדוקומנטציה של MATLAB על wavelets toolbox. להרחבת הידע על wavelets מומלץ גם לעיין גם בפרק 6.
את הקובץ ניתן להוריד בכתובת: <http://visl.technion.ac.il/exp3.htm>
או באתר www.mathworks.com
הגשת דו"ח מסכם - שבועיים לאחר הפגישה השניה לידי המדריך. איחורים יגררו הורדת ציון.
ניתן להגיש דו"ח מכין ומסכם בצורה אלקטרונית ע"י שמירת עותק מהדו"ח בחשבון הניסוי שניתן לכם.

מ ב ו א

מטרת ניסוי זה היא להציג את התחום העוסק בעיבוד אות ותמונות באמצעות Wavelets. נקודת המוצא של חלקו הראשון של הניסוי תהיה התמרת פורייה. משם דרך התמרת פורייה "קצרת הטווח" נגיע להתמרת ה-Wavelets ונתוודע למספר פונקציות Wavelets בסיסיות. תחום ה-Wavelets הוא רב ועצום – הוא מקיף נושאים החל ממתמטיקה "טהורה" (אנליזה ותורת האופרטורים, מד"ח) ועד לשיטות יישומיות לדחיסת תמונות. מטרתנו היא לתת הבנה בסיסית של כלי זה. בחלק הראשון של המעבדה נתמקד בתיאוריה של Wavelets ובשיקולים בעבודה עם אנליזה Wavelets. בחלק השני נראה יישומים של Wavelets בתחומים מגוונים של עיבוד אות ותמונה תוך התנסות ב-Wavelet Toolbox של סביבת Matlab.

מ ק ו ר ו ת

כללי

1. The g to Wavelets, Hubbard BB, AK Peters (בעיקר פרק 2.)
2. Ten Lectures On Wavelets, Daubechies I, CBMS-NSF 61, pages 1-7
3. Digital Image Processing , Rafael C. Gonzalez, Addison –Wesley Publishing Company (עמודים 85-89, 95-97)
4. Matlab wavelets help pages.

בטיחות

כללי:

תמצית הנחיות בטיחות מובאת לידיעת הסטודנטים כאמצעי למניעת תאונות בעת ביצוע ניסויים ופעילות במעבדה לחקר הראייה ומדעי התמונה. מטרתן להפנות תשומת לב לסיכונים הכרוכים בפעילויות המעבדה, כדי למנוע סבל לאדם ונזק לציוד. אנא קראו הנחיות אלו בעיון ופעלו בהתאם להן.

מסגרת הבטיחות במעבדה:

- ♦ אין לקיים ניסויים במעבדה ללא קבלת ציון עובר בקורס הבטיחות של מעבדות ההתמחות באלקטרוניקה (שהינו מקצוע קדם למעבדה זו).
- ♦ לפני התחלת הניסויים יש להתייבב בפני מדריך הקבוצה לקבלת תדריך ראשוני הנחיות בטיחות.
- ♦ אין לקיים ניסויים במעבדה ללא השגחת מדריך ללא אישור מראש.
- ♦ מדריך הקבוצה אחראי להסדרים בתחום פעילותך במעבדה; נהג על פי הוראותיו.

עשה ואל תעשה:

- ♦ יש לידע את המדריך או את צוות המעבדה על מצב מסוכן וליקויים במעבדה או בסביבתה הקרובה.
- ♦ לא תיעשה במזיד ובלי סיבה סבירה, פעולה העלולה לסכן את הנוכחים במעבדה.
- ♦ אסור להשתמש לרעה בכל אמצעי או התקן שסופק או הותקן במעבדה.
- ♦ היאבקות, קטטה והשתטות אסורים. מעשי קונדס מעוררים לפעמים צחוק אך הם עלולים לגרום לתאונה.
- ♦ אין להשתמש בתוך המעבדה בסמים או במשקאות אלכוהוליים, או להיות תחת השפעתם.
- ♦ אין לעשן במעבדה ואין להכניס דברי מאכל או משקה.
- ♦ בסיום העבודה יש להשאיר את השולחן נקי ומסודר.
- ♦ בניסיון לחלץ דפים תקועים במדפסת - שים לב לחלקים חמים!

בטיחות חשמל:

- ♦ בחלק משולחנות המעבדה מותקנים בתי תקע ("שקעים") אשר ציוד המעבדה מוזן מהם. אין להפעיל ציוד המוזן מבית תקע פגום.

- ♦ אין להשתמש בציוד המוזן דרך פתילים ("כבלים גמישים") אשר הבידוד שלהם פגום או אשר התקע שלהם אינו מחוזק כראוי.
- ♦ אסור לתקן או לפרק ציוד חשמלי כולל החלפת נתיכים המותקנים בתוך הציוד; יש להשאיר זאת לטפול הגורם המוסמך.
- ♦ אין לגעת בארון החשמל המרכזי, אלא בעת חירום וזאת - לצורך ניתוק המפסק הראשי.

מפסקי לחיצה לשעת חירום:

- ♦ במעבדה ישנם מפסקים ראשיים להפסקת אספקת החשמל. זהה את מקומם.
- ♦ בעת חירום יש להפעיל מפסקי החשמל הראשיים.

בטיחות אש, החייאה ועזרה ראשונה:

- ♦ במעבדה ממוקמים מטפי כיבוי אש זהה את מקומם.
- ♦ אין להפעיל את המטפים, אלא בעת חירום ובמידה והמדריכים וגורמים מקצועיים אחרים במעבדה אינם יכולים לפעול.

יציאות חירום:

- ♦ בארוע חירום הדורש פינוי, כגון שריפה, יש להתפנות מיד מהמעבדה.

דיווח בעת אירוע חירום:

- ♦ יש לדווח מיידית למדריך ולאיש סגל המעבדה.
- ♦ המדריך או איש סגל המעבדה ידווחו מיידית לקצין הביטחון בטלפון; 2740, 2222.
- ♦ במידה ואין הם יכולים לעשות כך, ידווח אחד הסטודנטים לקצין הביטחון.
- ♦ לפי הוראת קצין הביטחון, או כאשר אין יכולת לדווח לקצין הביטחון, יש לדווח, לפי הצורך:

משטרה 100,

מגן דוד אדום 101,

מכבי אש 102,

גורמי בטיחות ו/או ביטחון אחרים.

בנוסף לכך יש לדווח ליחידת סגן המנמ"פ לענייני בטיחות; 3033, 2146/7.

- ♦ בהמשך, יש לדווח לאחראי משק ותחזוקה; 4776, 052-419917

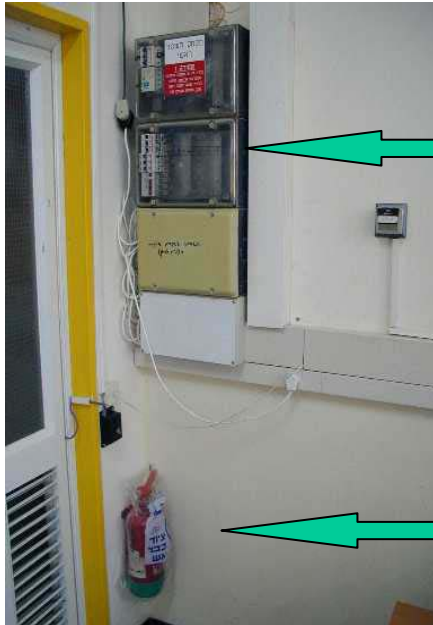
- ♦ לסיום, יש לדווח ל:

אחראי האקדמי (פרופ' רון מאיר חדר 605 טל. 4658)

עוזר למנהל (קומה 8, טל. 4678)

מהנדס המעבדה (חדר 604, טל. 4729)



בעת הצורך ניתן להודיע במקום למהנדס המעבדה לטכנאי המעבדה (חדר 615, טל. 4727) או לאחראית מחשוב המעבדה (חדר 615, טל. 4782).



• **ארון חשמל**

מטף כיבוי

הוראות כלליות

- ניתן להעתיק גרפים מתוך חלון ה-Matlab ע"י לחיצה בו-זמנית על הכפתורים alt+print screen ולהעתיק לתוך וורד. בתוך וורד ניתן להשתמש בכפתור crop הנמצא בסרגל Picture על-מנת לחתוך את התמונה כרצוי.
- משמעות הסימן  הינה שאלה שיש לענות עליה בדוח המסכם
- משמעות הסימן  היא שיש להעתיק את התמונה המתקבלת לדו"ח המסכם.

חלק א': מהתמרת פורייה להתמרת WAVELETS

רקע תיאורטי

התמרת STFT

התמרת פורייה הינה כלי יעיל לחישוב תכולת תדר של אות שאינו משתנה בצורה משמעותית לאורך הזמן או המקום – אות כזה נקרא אות סטציונרי. האינפורמציה שנותנת התמרת פורייה היא "בממוצע" על האות כולו, וקשה לדלות ממנה מידע לגבי מתי או היכן התרחשו, החלו או הסתיימו אירועים לא סטציונריים כמו הלמים ושינויי תדר.

כבר בשנת 1946 הציע החוקר Gabor התמרת פורייה קצרת טווח STFT Short Time Fourier Transform – כדי לתת בנוסף למידע לגבי תכולת התדר גם מידע לגבי מתי / היכן התרחשו התופעות: מגדירים פונקצית חלון ומעבירים אותה על פני האות, כך שהאות המקורי מחולק לתתי קבוצות חופפות שלו. בכל תת-אות כזה מחשבים את התמרת פורייה, וכך ניתן לקבל מידע על השתנות תכולת התדר בזמן או במקום. החיסרון העיקרי של גישה זו הוא שגודל החלון מגדיר סקלה מסוימת בה נבחנות התופעות.

בהתמרה זו גודל החלון נשאר קבוע ואינו משתנה ולכן כדי לקבל אינפורמציה על מגוון תדרים רחב יש לבצע אנליזה עם מספר גדלים של חלון או לבחור גודל יחיד ולקבל מידע ברזולוציה לא אופטימאלית.

מקדמי התמרת הפורייה קצרת הטווח ניתנים ע"י המשוואה:

$$STFTx(\tau, \Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) * g(t - \tau) * e^{2\pi\Phi i t} dt$$

עקרון אי-הוודאות

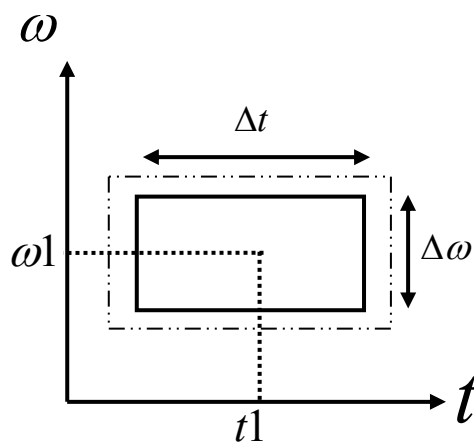
עבור התמרות זמן-תדר מתקיים עקרון אי הוודאות של הייזנברג:

עבור פונקציה $f \in L^2$, שלה תמך אפקטיבי בזמן Δt ותמך אפקטיבי בתדר $\Delta \omega$ (בסביבת זמן t_1

ותדר ω_1), מתקיים: $\Delta t \Delta \omega \geq \frac{1}{4}$.

משמעות אי הוודאות הינה שככל שנמדוד/נמדוד את התדר בצורה מדויקת יותר, כך הוודאות לגבי זמן השנוי תהיה קטנה יותר.

ניתן לצייר את אי הוודאות במישור המשולב זמן-תדר ולקבל את אי הוודאות כשטח הריבוע:



איור 1

עבור חלון גאוסייני מתקבלת אי-וודאות מינימלית, כלומר $\Delta t \Delta \omega = \frac{1}{4}$ (קו רציף). חלונות אחרים ייתנו אי-וודאות גדולה יותר (קו מרוסק).

התמרת גלונים - Wavelets

החידוש המשמעותי בהתמרת ה-Wavelets הוא שגודל החלון משתנה בהתאם לאינפורמציה הספקטראלית אותה רוצים לקבל. עבור תדרים נמוכים נטפל באינטרוולים גדולים יחסית (חלון אנליזה גדול) כדי לשערך את התדר בצורה מדויקת יחסית. עבור תדרים גבוהים, נשתמש באינטרוולים קצרים יותר (חלון קטן יותר), על-מנת לקבל אינפורמציה טובה יותר לגבי מיקום השינויים המהירים.

מקדמי התמרת ה-Wavelets יתנו את האינפורמציה הרגעית/מקומית לגבי "תכולת הסקאלות" של הסיגנל.

התכונות הרצויות מפונקציות ה-Wavelets :

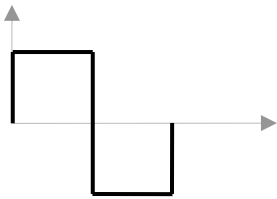
א. אורתונורמליות

ב. תמך סופי

ג. סימטריה מסביב לציר מוגדר

ד. ממשיות

ה. חלקות (נמדדת ע"י מספר הנגזרות הקיימות)



איור 2

אחת המשפחות הראשונות שנתגלו בשנת 1909 היתה משפחת Haar. זהו בסיס פשוט מאד לאנליזה אך חסרונו שאינו רציף. פונקציית האנליזה של בסיס Haar הינה כמתואר באיור 2. האנליזה ע"י בסיס Haar מתבצעת עם גרסאות מוזזות ומנופחות של חלון זה.

משפט : אם משפחת גלונים הינה ממשית, אורתונורמלית, בעלת תמך סופי וסימטרית, זוהי משפחת Haar (כלומר, היא בהכרח אינה חלקה).

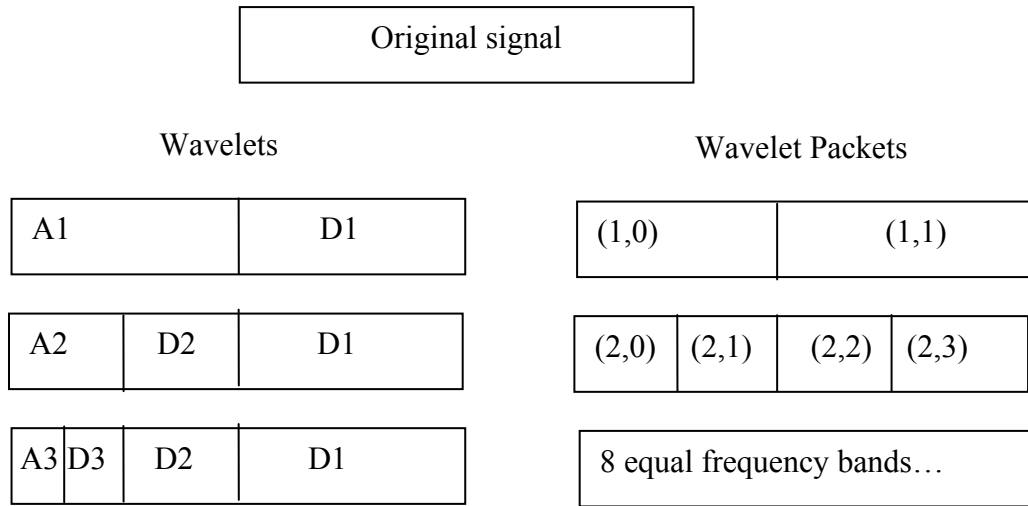
מכיוון שלבסיס Haar חסרון מובנה (אינו חלק), הוגדרו משפחות Wavelets אשר "מוותרות" על תנאי אחד מתוך חמשת התנאים, למשל:

- בסיסים בי-אורתוגונליים: בסיסים אלו מכילים משפחת פילטרים לקידוד האות ומשפחת פילטרים שונה לבנייתו ממערך המקדמים. פונקציות הבסיס זה הינן סימטריות, ממשיות ובעלות תמך סופי.
- בסיסים קומפלקסים, בהן פונקציות האנליזה והסינתזה מרוכבות.
- בסיסים בעלי פונקציות שאינן סימטריות.

אנליזה של סיגנל ע"י משפחת גלונים מתבצע ע"י פרוק רקורסיבי לתחומי תדרים נמוכים (קירוב של האות, low-pass, הנקרא גם approximation ומסומן באות A) ותחום תדרים גבוהים (אלו ה"פרטים" של האות כגון שפות, high-pass, הנקרא גם details ומסומן באות D). לאחר פירוק בפעם הראשונה נקבל שתי סדרות של מקדמים, A1 ו-D1, שהם הקירוב והפרטים של האות המקורי. לאחר מכן מפרקים את מקדמי A1 שוב ליצירת A2 ו-D2, וכך הלאה (צד ימין של איור 3).

Wavelet packets

הינו פירוק דומה לפרוק wavelets. השוני הינו שבפרוק wavelets מפרקים באופן רקורסיבי רק את התדרים הנמוכים, בעוד בפרוק wavelet packets ממשיכים לפרק באופן רקורסיבי גם את התדרים הגבוהים (צד שמאל של איור 3). נהוג למספר את מקדמי הפירוק ע"י זוג מספרים (מס' סודר, רמת פירוק) כמתואר באיור 3: הפירוק לרמה הראשונה יכול שני צמתים: (0,1) ו-(1,1). בצורה סכמאטית ניתן לצייר את ההבדל כך:



איור 3

עבור סיגנלים דו ממדיים

נראה (אך לא נוכיח) איך נראה פירוק Wavelets ופירוק Wavelet Packets עבור תמונות:

בפירוק לרמה ראשונה התמונה מחולקת ל-4 אזורים המכילים:

approximation	Horizontal details
Vertical details	Diagonal details

- תמונת קירוב (low-pass) - approximation
- פרטים (שפות) אופקיים – horizontal details
- פרטים (שפות) אנכיים – vertical details
- פרטים בכוון אלכסוני – diagonal details

בפירוק לרמות הבאות, מתקיים בצורה רקורסיבית:

איור 4

- בהתמרת wavelets מפרקים ל-4 אזורים רק את תמונת הקירוב
- בהתמרת Wavelet Packets מפרקים בצורה דומה כל אחד מארבעת האזורים שהתקבלו ברמה הקודמת.

1. כתבו תכנית MATLAB המייצרת תמונה שגודלה 128 – על – 128 פיקסלים עם אות

$$\text{.sin}(4/128 * 2\pi * x + 32/128 * 2\pi * y)$$

סינוסי מהצורה:

הציגו את התמונה בעזרת הפונקציה `IMSHOW`. כמה מחזורי סינוס תצפו לקבל בכיוון X וכמה בכיוון Y . מהו התדר המרחבי בכל אחד מן הכיוונים? שימו לב: היחידות בהן משתמשים לתאור

$$\frac{1}{\text{pixel}}$$

תדר מרחבי הן:

כלומר, אם אורך מחזור אחד בפיקסלים הוא N , התדר המרחבי הוא: $N-1$.

2. כעת נבצע התמרת פורייה בדידה של התמונה בעזרת פונקציית `fft2` ונציג אותה על ידי

הפקודה: `imshow(log(abs(fft2(image))))`

נסה לראות כיצד מוודאים כי קבלנו את תמונת ההתמרה לה ציפינו. השתמשו בפקודה `pixval` על מנת לקבל את ערכי הפיקסלים בהם ההתמרה קבלה ערכים מקסימליים. בזכרנו כי MATLAB מתחילה לספור מאחת ולא מאפס, האם ערכים אלה נכונים? תנו הסבר לעובדה שקבלתם יותר מנקודה אחת. כדי לקבל את אלמנט ה-DC במרכז נבצע הזזה על ידי `fftshift` של התוצאה. תארו מה קבלתם כעת?


3. כתבו תכנית MATLAB המחזירה התמרת פורייה קצרת טווח של אות חד ממדי. מהו ממד


האות המתקבל במישור ההתמרה? (חד ממדי, דו ממדי או אולי תלת ממדי?)


4. את התמרת הפורייה קצרת הטווח ניתן לבצע עם חלונות שונים מהחלון המקורי שהוצע,

שהינו חלון גאوسیני. תנו יתרון וחסרון לכל סוג חלון מהבאים (זכרו את עקרון אי הוודאות):

- חלון גאوسیני
- חלון ריבועי
- חלון המינג Hamming

5.  הציגו את ה-Wavelets החד-ממדיים הבאים: Haar, db4, db2, sym8, morl, mexh. (היעזרו בפקודת WFILTERS והציגו את מסנן Decomposition Low-pass)

6.  תנו יתרון וחסרון לכל תכונה ברשימת התכונות א-ה (ברקע התיאורטי של התמרת ה-Wavelets).

7.  הראו שעבור בסיס haar מתקיימות כל התכונות א-ד ברשימת התכונות

מהלך הניסוי – חלק א'

1. כתבו פונקציה היוצרת את התמונה הבאה:

$$\sin\left(\frac{4}{128} * 2\pi * x + \frac{4}{128} * 2\pi * y\right) + \sin\left(\frac{32}{128} * 2\pi * x + \frac{32}{128} * 2\pi * y\right) + 1.5 * \delta_{x,y}^{20,40} + 1.5 * \delta_{x,y}^{20,32}$$

בתמונה זו, שני תדרים בסיסיים וכמו כן שני הלמים בנקודות (32,20) ו-(40,20). נחשב את התמרת פורייה של האות. מה קיבלתם? ממה נובעים הפסים בתמונת ההתמרה? (רמז: מהי התמרת פונקצית דלתא? מה קורה אם יש יותר מפונקצית דלתא אחת?)

2. כדי לנסות ולקבל אינפורמציה ספקטרלית טובה יותר לגבי האות, נשתמש בהתמרת פורייה קצרת טווח - STFT. כדי להציג את ההתמרות בצורה ברורה נבחר את שורה 20, ונבצע התמרה רק על שורה זו. נבחר את פונקצית החלון להיות Hamming ונייצר אותו בעזרת פקודת MATLAB המתאימה (hamming).

3. העבירו את החלון על שורה 20 בצעדים של פיקסל, ובצעו התמרת פורייה לכל חלק בנפרד. חזרו על כך עבור גדלים שונים של חלון: 9,15,25,51,81,101. על מנת לקבל מידע על כל הדגימות בסיגנל, יש לשכפל את הסיגנל (ריפוד מחזורי) כך שתיווצר התמרה על סיגנל מחזורי. הציגו כל התמרה בחלון figure נפרד. נסו כעת למצוא מהו אורך החלון הקטן ביותר שתשתמשו בו כדי לקבל הפרדה בין הדלתות?

4. ציינו מהם היתרונות והחסרונות של STFT עבור גדלי חלון שונים? איזה מידע בולט יותר ואיזה מיטשטש או נעלם כפונקציה של גודל החלון.

הערות טכניות:

- על מנת להציג את האינפורמציה הספקטרלית לאורך ציר ה-X צרו מטריצה שמימד אחד שלה הוא כמימד האות (128 במקרה שלנו). המימד השני יהיה כמימד חלון HAMMING בו השתמשנו. כלומר נקבל מטריצה שהעמודות (או השורות שלה, תלוי בהגדרה) יהיו אוסף טרנספורמי פורייה על אינטרוולים עוקבים באות.
- הציגו את המטריצה על ידי הפקודה:

```
figure;imshow(log(abs(matrix))); colormap(jet); colorbar
```

• היות ו"גזרנו" רק שורה אחת, השתמשו בפונקציית MATLAB : FFT, אין צורך לבצע FFTSHIFT.

• על מנת לקבל התמרה של כל הסיגנל גם עבור חלונות גדולים יש לשכפל את הסיגנל פעמיים (הרחבה מחזורית) ולבצע את ההתמרה על 128 הדגימות הראשונות.

1. צרו גל סינוס בן 500 דגימות בתדר הולך וגדל בעזרת הנוסחה:

$(t=[1:500];), f=\sin(2*\pi*t.^2/1000);$

2. שמרו את המערך של פונקציה f ע"י הפקודה `save f f`. הקישו `wavemenu`.

3. בחרו ב- `continuous wavelet 1-D` וטענו את הסיגנל באמצעות `File->load signal`.

4. בחרו ב- `haar wavelet` ובצעו אנליזה (ע"י כפתור `Analyze`). החלון העליון מציג את הסיגנל, מתחתיו מטריצת המקדמים של התמרת ה- `wavelets` ומתחתיה ערך המקדמים עבור שורה מסוימת ($a=32$).

5. במטריצת המקדמים פיקסל בהיר מסמל ערך מקדם גבוה (כלומר קיים תדר כזה במיקום הזה בסיגנל), בעוד פיקסל כהה מסמל מקדם נמוך.

א. נסו להבין מהם הציר האופקי והאנכי? מה משמעות ערך a גבוה – תדר נמוך או גבוה?
ב. מהי צורת מטריצת המקדמים שהייתם מצפים לקבל עבור הסיגנל הנתון (היכן המקדמים החזקים)?

ג. התבוננו במטריצת המקדמים עבור `haar`. למה כאשר תדר הסיגנל נמוך, יש מקדמי התמרה גבוהים בכל ציר התדר?

6. שחקו כעת עם הפרמטרים בחלון `Scale Settings`:

א. שנו את `Step` ל-2. באיזה ציר שונתה הרזולוציה? מה משמעות השינוי לגבי דיוק ההתמרה וגודל הזיכרון (וכמות החישובים) הנדרש לשמירת המטריצה המתקבלת?

ב. שנו כעת את `Step` בחזרה ל-1 ואת `Max` ל-32. מה השתנה כעת? מהי משמעות השינוי לגבי תדרים נמוכים וגבוהים? מי ייפגע מהשינוי?

7. החזירו את `Step, Max` לערכם המקורי.

א. שחקו עם `wavelets` שונים כך שתמצאו התמרה בה עבור התדרים הנמוכים מתקבלת תמונת התמרה מדויקת יותר (כלומר שערך התדר נכון יותר). מהו ה- `wavelet` אותו בחרתם? הוסיפו את תמונות מטריצת ההתמרה של שני ה- `wavelets` לדו"ח.

8. כעת נעבור להכיר את התמרת ה-wavelets הדיסקרטית. בחרו באפליקציית Wavelet 1-D. בצעו אנליזה של הסיגנל ל-5 רמות ע"י dmey (dmeyer) wavelet. בחנו את מקדמי הפירוק שמתקבלים עבור הרמות השונות. מה הקשר בין מיקום המקדמים הגבוהים, תדר הסיגנל המקורי באותו אזור ורכיב הפירוק $(d_1 \dots d_5, a_1, a_2 \dots a_5)$?

חלק ב': שימושים להתמרת WAVELETS

רקע תיאורטי

Soft and Hard thresholding

על מנת לבצע דחיסה או ניקוי אות, הדרך הפשוטה ביותר הינה איפוס מקדמים קרובים ל-0. מקדמים אלו ישפיעו מעט מאד על הסיגנל, אך אם ישנם מקדמים רבים כאלו, הסיגנל יידחס בצורה טובה. פעולה כזו נקראת thresholding, או חיתוך לפי סף. ישנן שתי דרכים מקובלות לבצע איפוס זה והן נקראות:

• Hard thresholding

• Soft thresholding

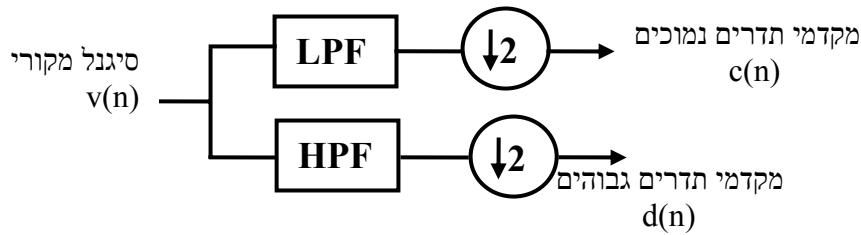
בהינתן סיגנל x וסף λ נגדיר את טרנפורמציות ה-thresholding כך:

$$T_{soft}(x) = \begin{cases} x - T & \text{if } x \geq \lambda \\ x + T & \text{if } x \leq -\lambda \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$
$$T_{hard}(x) = \begin{cases} x & \text{if } |x| \geq \lambda \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Fast Wavelet Transform

בשנת 1988 מצא Mallat אלגוריתם למימוש של התמרת הגלונים הדיסקרטית בצורה פשוטה. לפי אלגוריתם זה ניתן לבצע פירוק של סיגנל לשני פסי תדר: תדרים גבוהים ותדרים נמוכים, בצורה רקורסיבית, כך שבכל פעם נפרק פס תדר מסויים לשני תת-פסים. מכיוון שכעת רוחב כל פס תדר הינו חצי מרוחב פס המקור, ניתן לבצע דצימציה (דילול) ולשמור רק חצי ממספר המקדמים עבור פס המקור (סה"כ חצי ממספר המקדמים עבור תת-פס נמוך ועוד חצי עבור תת-פס גבוה).

ניתן לתאר את התהליך באופן סכמאטי



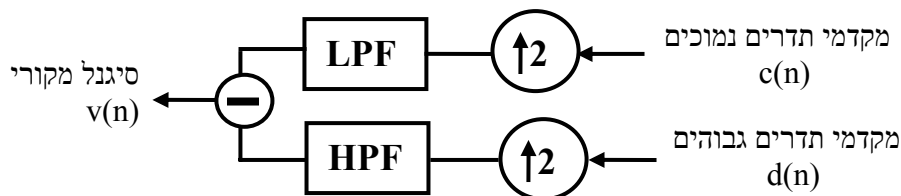
כך:

איור 5

על מנת לשחזר את האות המקורי מתוך אוסף המקדמים יש לבצע את הפעולות:

- הכנסת הספרה 0 לפני הסדרה ובין כל שני ערכים (בכל המקומות הזוגיים)
- העברת הסדרה המוגדלת c' דרך מסנן LPF ששימש לפירוק
- העברת הסדרה המוגדלת d' דרך מסנן HPF ששימש לפירוק
- חיסור הסדרות וקבלת סדרת המקור: $v(n) = c'(n) - d'(n)$.

ניתן לתאר צעד שחזור כך:



איור 6

Choosing best basis

פירוק wavelet packets הינו פרוק overcomplete (מכיל אוסף בסיסים), כך שניתן לייצג את האות לאחר הפירוק ע"י בסיסים שונים (למשל, במקום 2 צמתים בעץ $c(n)$ ו- $d(n)$ ניתן לבחור את אביהם המשותף $v(n)$ המכיל בדיוק את אותה האינפורמציה). בחירה זו מאפשרת לנו לבצע מינימיזציה על האנתרופיה של הסיגנל וע"י כך לקבל יחס דחיסה טוב יותר של סיגנל או תמונה.

האלגוריתם הבא מראה כיצד יש לבחור בסיס אופטימלי לייצוג האות בהינתן קריטריון אנתרופיה אדיטיבי:

נניח כי לסיגנל מסוים x קיים פרוק wavelet packets \mathcal{B} . הינו אוסף הבסיסים שמתקבלים ע"י הפרוק. M הינה פונקצית מחיר אדיטיבית (למשל אנתרופיה).
 B הינו בסיס נבחר מתוך אוסף הבסיסים \mathcal{B} . נסמן ב- Bx את הסיגנל x מיוצג ע"י הבסיס B , וב- $M(Bx)$ את המחיר (מחיר הייצוג) של הייצוג ע"י הבסיס B .

$$M(Bx) = M(x_k : k \in \mathbb{Z}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} M(x_k)$$

הבסיס "הטוב ביותר" $B \in \mathcal{B}$ הינו זה שממזער את $M(Bx)$.

על מנת למצוא את הבסיס יש להתבונן בעץ פירוק wavelet packets ובו על כל צומת רשום מספר המייצג את המחיר (אנתרופיה) של כל צומת. אנו רוצים להגיע לייצוג בעל המחיר הנמוך ביותר. התהליך מתבצע בצורה הבאה:

א. נסמן תחילה את כל העלים בעץ (נסמן ע"י כוכבית)

ב. ישנן 2 אפשרויות:

○ אם ל"אב" בעץ יש מחיר אינפורמציה נמוך מסכום המחירים של בניו או שווה לו ,

נרצה להשתמש ב נסמנו בכוכבית ונמחק את הכוכביות מהבנים שלו (אם ישנן).

○ אם ל"אב" מחיר אינפורמציה גבוה יותר – הוא נשאר "לא מסומן" אך יש לעדכן

עבורו את מחיר האינפורמציה הנמוך (כלומר של הבנים).

ג. לאחר מעבר על כל הצמתים בעץ, נשים לב כי עברנו על כל צומת פעמיים – פעם בתור בן ופעם בתור אב.

ד. בוחרים בכל תת-עץ את הצמתים המסומנים. אלו יהיו הצמתים בהם נשתמש על מנת לייצג את הסיגנל (למשל בשביל לשדרו בערוץ תקשורת). בחירה זו מבטיחה שמחיר האינפורמציה בכל תת-עץ יהיה הנמוך ביותר האפשרי.

ה. כאשר מציירים את תת העץ האופטימלי, יש לכלול בציור את כל הצמתים המסומנים וכן את אבותיהם, גם אם הם לא מסומנים בכוכבית.

דוח מכין – חלק ב'

Soft and Hard thresholding

1. כתבו פונקציות המבצעות Soft and Hard thresholding ב-Matlab.

2. הציגו תוצאות hard and soft thresholding על הסיגנלים הבאים:

- $\lambda=0.8, T=0.8, X=[-2:0.05:2]$

- $\lambda=0.8, T=0.2, X=[-2:0.05:2]$

- $\lambda=0.6, T=0.2, X=\sin(0:\pi/100:6*\pi)$

- בדקו מה קורה עבור המקרה בו $\lambda < T$, האם סביר לבחור ערכים כד?

Fast Wavelet Transform

3. הראו שאפשר לשחזר את הסדרה הבאה:

$$v=[1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \quad 16]$$

ע"י מסנן Haar wavelet מסדר שני:

$$c[m/2] = \frac{1}{\sqrt{2}} [v(m) + v(m+1)] \quad , m = 0, 2, 4, \dots$$

$$d[m/2] = \frac{1}{\sqrt{2}} [v(m) - v(m+1)] \quad , m = 0, 2, 4, \dots$$

כלומר, בצעו פירוק לתת הסדרות c ו-d ואז שחזרו מתוכך את v.

4. כתבו תכניות Matlab המבצעות:

- פירוק סיגנל לשני פסי תדר שלו ע"י חלון Haar: הפונקציה תקבל אות חד-ממדי ותחזיר את

הפירוק לפס תדר גבוה ונמוך: `Function [approx, detail]=haar_down(signal)`

- אנליזה (הרכבה) של שני פסי תדר לאב המשותף:

`Function [sig]=haar_up(approx, detail)`

שימו לב:

- לשם מימוש נכון ב-Matlab עליכם להשתמש בפונקציה conv ולא בפונקציה filter.

- בדקו שהתכנית שלכם מחזירה את הוקטור $v1=[1:16]$ כאשר מבצעים פירוק ואנליזה:

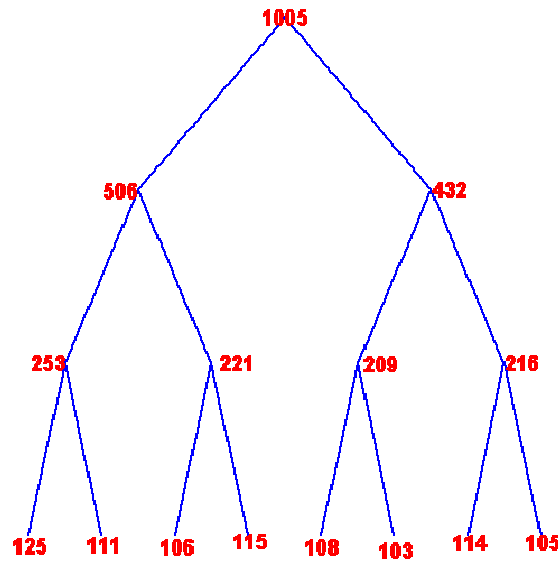
$$[c,d]=haar_down(v);$$

$v1=haar_up(c,d);$


$round(v1)=v$: לשם בדיקה בדקו אם הוקטורים זהים:

Choosing best basis

על כל צומת בדוגמה הבאה נתון מחיר אנתרופיה של אותה צומת. חשבו עבור הדוגמה הבאה את הבסיס הטוב ביותר לייצוג האות לפי קריטריון מינימום אנתרופיה:



איור 7

חשבו את האנתרופיה המינימלית המתקבלת מבחירה אופטימלית של עץ ושרטטו את העץ המתקבל. 

מהלך הניסוי – חלק ב'

עליכם לענות בדוח המסכם על השאלות ולהציג גרפים מתאימים בדו"ח.

בחרו כעת ב-wavelet 1-D. העלו סיגנל ע"י:

File->Example Analysis-> Noisy Signal – constant noise variance ->
noisy blocks

סיגנל זה הינו אות מסוג "בלוק מדרגות" מורעש (כשמו כן הוא).

1. בצעו אנליזה ע"י haar wavelet. 

2. ככלל אצבע, נבחר לבצע פירוק למספר רמות כך שהרמה הנמוכה ביותר תיראה לא מורעשת.

✍ ל כמה רמות תבחרו לפרק את הסיגנל הנדון?

3. נתבונן תחילה בסטטיסטיקה של הסיגנל. לחצו על statistics. הציגו את סטטיסטיקת המקדמים הגבוהים details עבור 100 תאים (bins).

א. ✍ בחנו את הסטטיסטיקה של מקדמי detail של רמה 1. מהי פונקציית הפילוג אליה ניתן לקרב את סטטיסטיקת האות? מהם הפרמטרים של פונקצייה זו?

ב. ✍ בחנו את הסטטיסטיקה של מקדמי detail של רמה 5. מהי מסקנתכם כעת?

WAVELET COMPRESSION

4. נבצע wavelet compression: בחרו בכפתור compress.

א. ✍ בדקו את השפעת ה-scroll bar (שמשנה את האנרגיה) על צורת הסיגנל המתקבל – לאחר שבחרתם כמה אנרגיה מהסיגנל תישמר לאחר הדחיסה יש ללחוץ על כפתור compress. יופיעו סיגנל אדום (מקורי) וצהוב (לאחר דחיסה).

ב. ✍ השוו בין מטריצות המקדמים לפני ואחרי הדחיסה - איזה מקדמים נשמרו ואיזה לא?

5. סגרו את wavelet 1-D ופתחו את אפליקציית wavelet 2-D.

בחרו את סיגנל הדוגמה Finger (שלישי מלמעלה) ובחרו בכפתור Compress

א. ✍ בחרו בשיטת Balance sparsity-norm. באופן אוטומטי נבחרים פרמטרים כך שכ-96% מהאנרגיה של האות נשמרת. בצעו דחיסה. הציגו את תמונות האות המקורי והדחוס. האם ניתן לראות הבדלים ביניהם? ציינו היכן.





ב. ✍ פי כמה נדחס האות בשיטה זו?

ג. ✍ בחרו בשיטת remove near 0. בצעו דחיסה. האם ניתן לראות הבדלים בין האות המקורי והדחוס? מה יחס הדחיסה המושג עכשיו?




6. ✍ בחרו 3 סיגנלים אחרים מתוך Example Analysis. בחרו שיטת דחיסה (Balance

remove near 0/ sparsity-norm) וסף אנרגיה שתשמר מהאות. השוו בין תוצאות הדחיסה עבור 3 הסיגנלים. צרפו את תוצאות הדחיסה ע"י העתקת החלון ודונו בתוצאות תוך דיון במבנה התמונות ובסטטיסטיקת האות.

WAVELET DENOISING

7. כעת נראה wavelet de-noising. חזרו לחלון 1D wavelets, בחרו שוב בסיגנל noisy blocks ולחצו על כפתור de-noise.
- א.  אילו תדרים תרצו לסנן (גבוהים/נמוכים)? מצאו קומבינציה "טובה יותר" ע"י משחק עם ה-scroll bars של כל רמה (רמות 1-5). הוסיפו לדו"ח את תמונת הסיגנל לפני ואחרי ניקוי הרעש.
8.  נסו לסנן רעש (de-noise) ע"י db4 wavelet. מה מסקנותיכם לגבי השפעת סוג ה-wavelet על תוצאות סינון הרעש?
9. חזרו לחלון 1-D wavelet ובצעו אנליזה לסיגנל noisy blocks בעזרת haar wavelet. בחרו ב-Display mode=Tree mode. כל רמה מתפרקת כאן ל-2 רכיבי תדר: תדרים גבוהים (d=details) ותדרים נמוכים (a=approximation).
- א.  איזה מרכיבי העץ הכי דומה לסיגנל (המשוערך) ללא רעש?
- ב.  איזה מרכיב רעש הכי דומיננטי בסיגנל? היכן (בערך) הוא נמצא בתחום התדר? (חלקו בצורה רקורסיבית את תחום התדר הנמוך לתדרים גבוהים ונמוכים כך שיתקבל מבנה דומה לעץ המוצג).

BEST TREE SELECTION

10. סגרו כעת את היישום ובחרו ב-Wavelet Packet 1-D. בחרו בסיגנל noisbloc (נמצא באמצע רשימת הסיגנלים לדוגמה). שימו לב שאתם עובדים עם Haar wavelet, ופירוק לרמה 3.
11. הציגו עבור כל node את האנתרופיה שלו ע"י בחירה מתאימה של Node Label (בצד ימין באמצע החלון).
12.  לחצו על כפתור Best tree. השוו עם התוצאות שקיבלתם בדו"ח המכין.
13.  הורידו מאתר המעבדה את הקובץ nodes.mat המכיל צמתים של עץ הפירוק עבור הסיגנל noisbloc. השתמשו בפונקציות haar_down, haar_up שכתבתם על מנת לשחזר את הסיגנל המקורי מתוך העץ האופטימלי שחושב בסעיף הקודם. צרפו את התוצאה לדו"ח המסכם.
14.  לו הייתם משתמשים ב-Wavelets אך לא ב-Wavelet Packets, האם היה מתקבל אותו עץ אופטימלי? מדוע?

סיום המעבדה

עליכם להגיש דו"ח מסכם לשני החלקים בצורה אלקטרונית בחשבון המחשב שהוקצה לכם במעבדה. ניתן לעבוד על הדו"ח מכל מחשב ברשת הטכניונית ע"י בחירת
domain : TD-VSL

לאחר סיום הדו"ח חשוב יש למלא טופס משוב על המעבדה הנמצא בדף:

<http://www.ee.technion.ac.il/Labs/EELabs>

צבוקה נעימה!